2.1.4　オプションのプレミアム計算（のアイデア）

　オプション・プレミアム（値段）をきちんと計算するのは、かなり大変な作業であるため、“**プライサー**”とよばれるソフトウェアを使いコンピュータで計算するのが一般的です。プライサーは、オプションタイプ、満期日、権利行使価格、金利、ボラティリティ、現在の株価などの入力に対して、プレミアムやその他さまざまな数値（リスクパラメター）を出力します。

　今回は、オプションの計算ではよく用いられる“**2項モデル**”とよばれる方法によって、コール・オプションのプレミアムについて考えてみましょう。少し難しいかもしれませんが、ここではその流れと考え方を追っていただくことで十分です。計算の過程で、ボラティリティが深くかかわってきていることを納得していただけると思います。

　いま、年率32%のボラティリティを持つある株の株価が100円であるとします。明日この株を99円で買う権利、つまり満期日まで1日、権利行使価格99円の（ヨーロピアン）コールのプレミアムはいくらになるでしょうか？　話を簡単にするために、金利を単利で日歩1%として計算してみましょう。

　年率32%のボラティリティですから、1日あたりのそれは32%÷16＝2%で、株価100円に対しては2円程度の上下変動を仮定できます。そこで、明日の株価の終値は

　　ケースＵ：確率Ｐで100＋2＝102（円）
　　ケースＤ：確率1－Ｐで100－2＝98（円）

のどちらかが起こるとしましょう。このときの、明日の株価の期待値（＝平均値＝[値×確率]の総和）は、

$$P\times 102+(1-P)\times 98=4P+98\text{（円）}$$

です。

　一方、日歩1%の金利で金を借りて、株価100円の株を今日買うとしたら、明日の株価は、1日分の金利が加算されて、

$$100\times(1+0.01)=101\text{（円）}$$

となることが期待されます。したがって、

$$4P+98=101$$

が成り立つことが期待でき、これよりＰを求めれば、Ｐ＝0.75 がわかります。確率Ｐの値がわかったので明日の株価についての 2 つのケースはそれぞれ、

ケースＵ：確率 0.75 で 102 円
ケースＤ：確率 0.25 で 98 円

となります。

ケースＵが起こった場合、権利行使価格 99 円より 3 円高い株価になっている（イン･ザ･マネー）わけですから、99 円で権利行使して 102 円で売却することで 3 円の利益が出ます。一方、ケースＤでは、権利行使価格より低い株価ですから、権利行使は意味がなく、このコールも価値がありません（アウト･オブ･ザ･マネー)。したがって、それぞれのケースについて、明日の時点でのコールの価値は、

ケースＵ：確率 0.75 で 3 円（イン･ザ･マネー）
ケースＤ：確率 0.25 で 0 円（アウト･オブ･ザ･マネー）

となり、期待値（平均値）をとると

$$0.75\times3+0.25\times0=2.25\text{（円）}$$

しかし、これは明日の時点での価値です。今日の時点での価値は金利 1%の分だけ下がります（明日の 101 円は今日の 100 円に等しい)。つまり、

$$2.25\div(1+0.01)=2.2277\text{（円）}$$

これがコールのプレミアム（値段）です。計算では、金利（日歩 1%）とボラティリティ（年率 32%）が重要な働きをしている点に注意してください。

もう一歩深く考えましょう。同じ仮定で満期日まで 2 日あるとしたらどうなるでしょう？　さきほどの例よりもう 1 日多いのですから、1 日目で株価 102 円になるケースＵの場合が、2 日目に、さらに次のように 2 つに分かれます。

ケースＵＵ：確率 0.75×0.75 で 104 円（2 日目も 2 円上がる）
ケースＵＤ：確率 0.75×0.25 で 100 円（2 日目は 2 円下がる）

同様に１日目で株価98円になるケースＤの場合も、２日目には次のように２つに分かれます。

ケースＤＵ：確率 0.25×0.75 で 100 円（2 日目は 2 円上がる）
ケースＤＤ：確率 0.25×0.25 で 96 円　（2 日目も 2 円下がる）

それぞれのケースについて株価と権利行使価格（99 円）とを比べると、2 日後の時点でのコールの価値は

ケースＵＵ：確率 0.75×0.75 で 5 円（イン・ザ・マネー）
ケースＵＤ：確率 0.75×0.25 で 1 円（イン・ザ・マネー）
ケースＤＵ：確率 0.25×0.75 で 1 円（イン・ザ・マネー）
ケースＤＤ：確率 0.25×0.25 で 0 円（アウト・オブ・ザ・マネー）

これら４つの場合の期待値をとって、

$$0.75\times0.75\times5+0.75\times0.25\times1+0.25\times0.75\times1+0.25\times0.25\times0=3.1875$$

これを今日時点での現在価値に（2 日分）割り引いて、コールプレミアム

$$3.1875\div(1+0.01\times2)=3.1250（円）$$

を得ます。満期日まで１日のプレミアム（＝2.2277 円）より高いですね。一般的に、“**満期日まで長いオプションの方が、そのプレミアムが高くなる**”のです。
　さらに、ボラティリティのプレミアムへのかかわり方について、もう少しだけ考えてみましょう。同じ例で、ボラティリティが 32%でなく２倍の 64%であったとしたら、１日あたりのボラティリティは 64%÷16＝4%とみなされ、一日の株価の変動が上下 4 円となります。したがって、さきほどの 4 つのケースはそれぞれ、

ケースＵＵ：確率 0.75×0.75 で 9 円（イン・ザ・マネー）
ケースＵＤ：確率 0.75×0.25 で 1 円（イン・ザ・マネー）
ケースＤＵ：確率 0.25×0.75 で 1 円（イン・ザ・マネー）
ケースＤＤ：確率 0.25×0.25 で 0 円（アウト・オブ・ザ・マネー）

と変化します。これより、プレミアムは

0.75×0.75×9＋0.75×0.25×1＋0.25×0.75×1＋0.25×0.25×0＝5.4375
5.4375÷(1＋0.01×2)＝5.3309（円）

と計算されます。

この結果は、“**ボラティリティが上がるとオプションの価値も上がる**”ことを示しています。オプションをある値段で買う、ということは、その値段に含まれているボラティリティ（これを“**インプライド・ボラティリティ**”という）を低いとみなし、それよりも高いボラティリティを今後の市場に仮定している、ということに他なりません。つまり、対象の証券は、将来はもっと変動すると考えている、ということなのです。